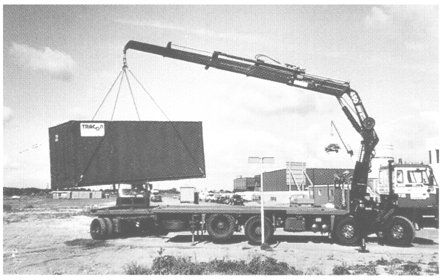
DYNAMIQUE

Dominique Dubuis
Lycée Margueritte VERDUN
http://www.bacssimargo.fr

1. Où s'arrête la STATIQUE, où commence la DYNAMIQUE ?

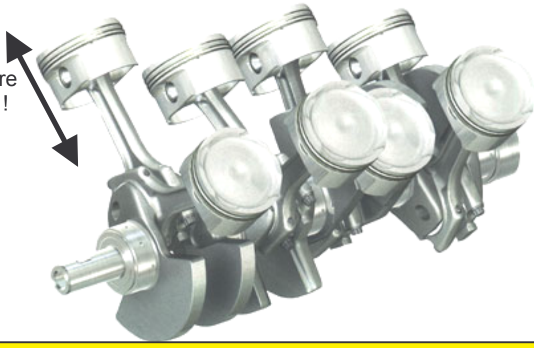
Rappelons qu'en **STATIQUE**, les solides sont considérés en EQUILIBRE

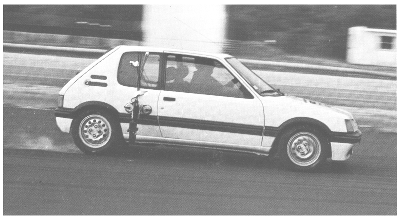


La STATIQUE permet donc d'étudier les efforts sur un système immobile, ou animé de mouvements lents et progressifs.

Mais tous les systèmes ne sont pas en équilibre : on entre dans le domaine de la **DYNAMIQUE** lorsque le mouvement d'un solide génère à lui seul des efforts non négligeables, par effet « d'inertie ».

Un piston de moteur peut faire 100 aller-retours par seconde ! Il est loin d'être en équilibre…





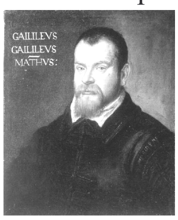
Un freinage… plus ou moins brutal, s'étudie par les lois de la DYNAMIQUE

La DYNAMIQUE permet de faire le lien entre un mouvement d'accélération et les efforts générés pendant ce mouvement.
On entend par « accélération » toute variation d'un vecteur vitesse : augmentation, diminution, effet centrifuge, chute libre, etc.

Un peu d'histoire…

Les Grecs, il y a deux bons millénaires, maîtrisaient déjà bien, à leur manière, les problèmes de statique ; Archimède avait tout compris du levier : « *donnez moi un point d'appui et je soulèverai le Monde* ». Il appliquaient même le principe du levier (augmenter le déplacement pour réduire l'effort) à des systèmes de poulies assez sophistiqués. En revanche ils étaient bien moins habiles à expliquer les mouvements tels qu'une chute libre.

Au XVII°, Galilée, en s'amusant à faire rouler des billes sur des plans inclinés, a énoncé un principe dont la modernité est remarquable : "*tout corps possède une certaine inertie qui l'oblige à conserver sa vitesse, à moins qu'une force extérieure ne l'oblige à arrêter ce mouvement*".



Galilée (1564-1642)

Moins d'un siècle après Galilée, et en ayant pris soin de bien définir ce qu'étaient une masse, un poids, une force, etc, Isaac Newton a formulé trois lois fondamentales :

1ère loi "*Tout objet en état de mouvement rectiligne uniforme et soumis à aucune force extérieure, conserve son mouvement, dans un repère galiléen.*"

2ème loi "*Force = masse × accélération*"

3ème loi "*Tout corps soumis à une force exerce en retour une force de même intensité et de direction opposée.*"

Newton (1642-1727)

Le Principe de la Dynamique est la traduction, avec les outils mathématiques actuels, des lois de Newton.

2. REPERES utilisés en mécanique

Le Principe Fondamental de la Dynamique ne peut s'exprimer que dans certains repères (ou référentiels) : les repères "galiléens".

Un repère lié au sol sera considéré comme galiléen pour les applications courantes de mécanique, mais ce n'est qu'une (excellente) approximation.

<u>En toute rigueur :</u>

En mécanique dite classique (à des vitesses très inférieures à celle de la lumière), le Principe de la Dynamique est vérifié dans un repère **absolu**, tel que :

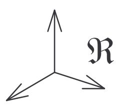
- ■ **Le repère de COPERNIC** , dont le centre est le centre de gravité du système solaire, et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles fixes.
- ■ **Les repères GALILEENS**, qui sont n'importe quel repère en **<u>translation rectiligne uniforme</u>** par rapport au repère de Copernic.

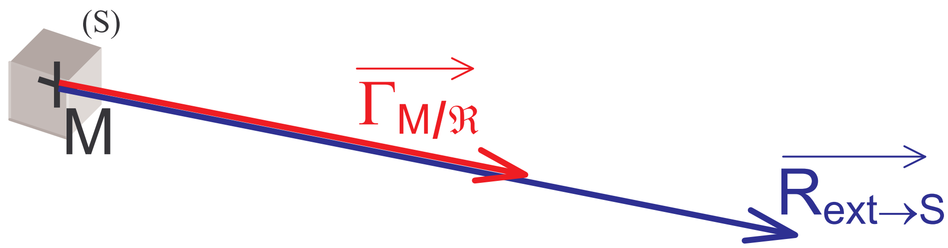
Par conséquent, un repère lié à la Terre n'est pas Galiléen, donc pas absolu, à cause de la rotation de celle-ci. Mais il faudrait par exemple faire osciller un pendule de plusieurs mètres de haut pendant plusieurs heures pour avoir un effet mécanique mesurable du mouvement de la Terre (C'était la fameuse expérience du Pendule de Foucault, vers 1850).

3. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE (P.F.D.) : Enoncé général, quel que soit le mouvement

3.1. CAS D'UN SOLIDE « PONCTUEL »

Soit un solide (S) de masse m, suffisamment petit pour qu'on le représente par un point M





Dans le repère galiléen $\Re$:

Si le solide S est soumis à des actions extérieures se réduisant à une résultante $\overrightarrow{R_{ext\to S}}$, alors son mouvement est tel que :

$$\overrightarrow{R_{ext\to S}} = m \,.\, \overrightarrow{\Gamma_{M/\Re}}$$

somme des FORCES = MASSE × vecteur ACCELERATION du point M

3.2. UNITES

- La **masse** m est en **kg** (défini par un étalon, qui se basait sur la masse d'un dm^3 d'eau)

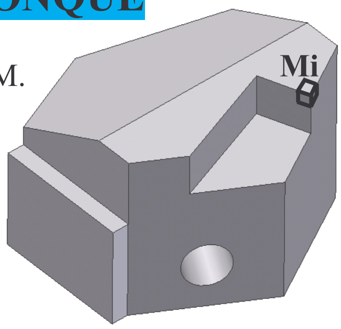
- L'**accélération** est en **m/s^2** (le mètre et la seconde ayant été anciennement définis à partir de la circonférence et de la durée de rotation de la Terre

- L'unité de **force** se déduit donc du principe de la dynamique : **1 N = 1 $kg.m/s^2$**

*Le Newton (**N**) est la force qui communique à une masse de 1 kg une accélération de 1 m/s^2 dans sa direction.*

3.3. CAS D'UN SOLIDE QUELCONQUE

Soit un solide (S) quelconque, de masse M.



Contrairement au "petit" solide du paragraphe précédent, celui-ci peut subir des efforts en différents point, qui peuvent le faire tourner. Il y aura donc en plus une équation de moments...

La démonstration, à partir du PFD d'un solide ponctuel, consisterait à considérer ce solide (S) quelconque comme une « somme » de points M_i de masses m_i , et cela donnerait les relations qui suivent:

Si le solide (S) est soumis à des actions extérieures quelconques : $\{\tau_{ext \to S}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{(ext \to S)} \\ \overrightarrow{M}_{A\,(ext \to S)} \end{array} \right\}$

Alors son mouvement dans un repère galiléen est tel que :

quel que soit A $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{(ext \to S)} = \Sigma\, m_i \,.\, \overrightarrow{\Gamma}_{M_i/R} \\ \overrightarrow{M}_{A\,(ext \to S)} = \Sigma\, \overrightarrow{AM_i} \wedge (\, m_i \,.\, \overrightarrow{\Gamma}_{M_i/R}) \end{array} \right.$

<---------> ***Résultante mécanique* = *Résultante dynamique***

<---> ***Moment mécanique* = *Moment dynamique***

Relation que l'on peut écrire aussi avec des torseurs :

$$\{\tau_{\text{mécanique}}\} = \{\tau_{\text{dynamique}}\}$$

dépend des **actions extérieures**

dépend du **mouvement**

Pour ce qui est du **torseur mécanique**, à gauche, vous savez faire : **c'est un bilan des actions extérieures comme en statique**. Le **torseur dynamique** contient en revanche des relations inutilisables telles quelles pour un élève de terminale, mais nous allons dans la suite de ce cours les appliquer aux **cas particuliers de la translation et de la rotation**.

Cela dit vous pouvez néanmoins déjà noter que **le Principe Fondamental de la Statique n'est qu'un cas particulier du PFD**, à accélération nulle, c'est à dire pour un corps immobile ou en translation rectiligne uniforme dans un repère galiléen (le « torseur dynamique » est nul).

3.4. THEOREME DE LA RESULTANTE

On peut montrer que **DANS TOUS LES CAS :**

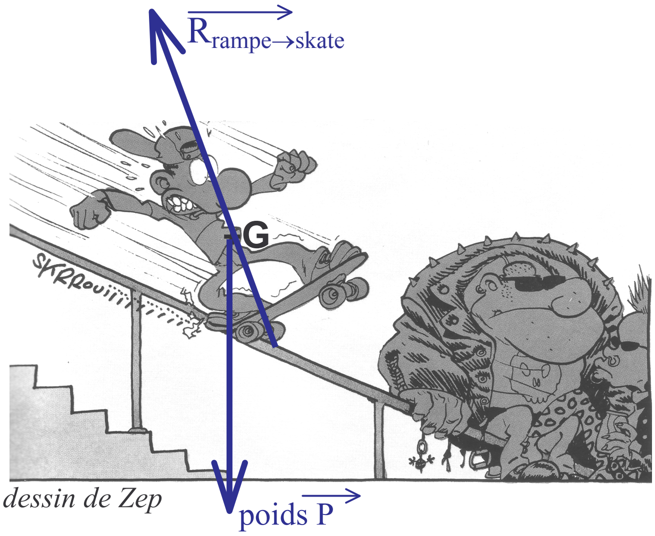
$$\Sigma\, m_i \,.\, \overrightarrow{\Gamma_{M_i/R}} = \mathbf{M} \,.\, \overrightarrow{\Gamma_{G/R}}$$

Masse totale *Vecteur accélération du centre de gravité G*

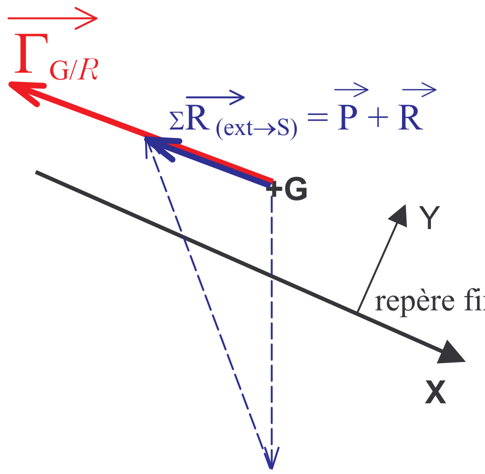
Ce qui donne $\boxed{\overrightarrow{\mathbf{R}}_{\mathbf{(ext\to S)}} = \mathbf{M} \,.\, \overrightarrow{\Gamma_{G/R}}}$ quels que soient le solide et son mouvement

Ce théorème permet déjà d'utiliser facilement le PFD dans le cas d'une translation :

4. P.F.D. appliqué à un SOLIDE EN TRANSLATION



dessin de Zep



PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE :
Si un solide (S) est en **TRANSLATION** par rapport à un repère galiléen R , alors :

PFD (translation) A savoir !

$$\begin{cases} \Sigma\overrightarrow{R}_{(ext\to S)} = M \,.\, \overrightarrow{\Gamma_{G/R}} \\ \Sigma\overrightarrow{M}_{G\,(ext\to S)} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

$\Sigma\overrightarrow{R}_{(ext\to S)}$ = *somme des résultantes des actions extérieures sur* S en N

$\Sigma\overrightarrow{M}_{G\,(ext\to S)}$ = *moment résultant en* G *des actions extérieures sur* S en N.m

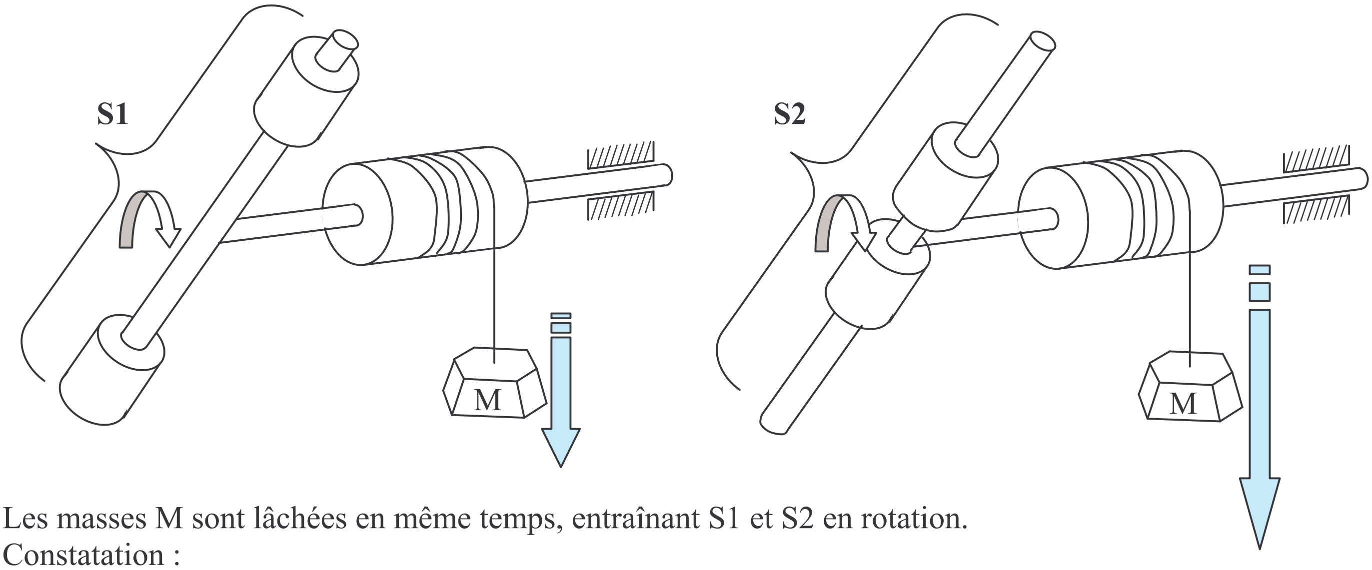
M = *masse totale du solide* S en kg

$\overrightarrow{\Gamma_{G/R}}$ = *vecteur accélération de son centre de gravité* G *dans le repère* R en m/s^2

5. MOMENT D'INERTIE d'un solide par rapport à un axe

5.1. NOTION

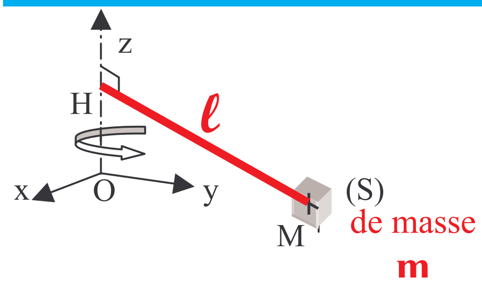
Expérience :



Les masses M sont lâchées en même temps, entraînant S1 et S2 en rotation.
Constatation :

La masse de droite descend plus vite : le solide S_2 est plus facile à mettre en rotation que S_1. (il est aussi plus facile à freiner).
Les deux solides ont les mêmes masses, mais réparties différemment autour de l'axe de rotation : ils n'ont pas le même « moment d'inertie »

5.2. MOMENT D'INERTIE d'un solide « ponctuel » par rapport à un axe



Soit un solide (S) modélisable par un point M, de masse m

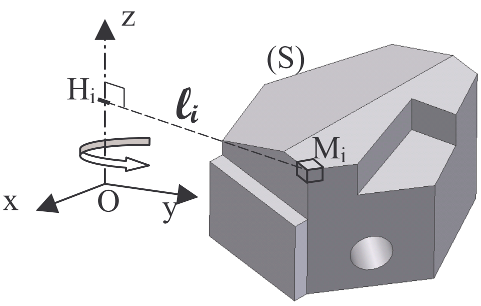
MOMENT D'INERTIE du solide (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{z})$

$$J_{Oz} = m.\ell^2$$

Unité : **kg.m²**

Ce qui veut dire que si le solide est 2 fois plus lourd, il est 2 fois plus difficile à mettre en rotation, et s'il est 2 fois plus loin de l'axe, il sera 4 fois plus difficile à mettre en rotation.

5.3. MOMENT D'INERTIE d'un solide quelconque par rapport à un axe



Ce solide peut être considéré comme une « somme » de points M_i de masses dm_i.

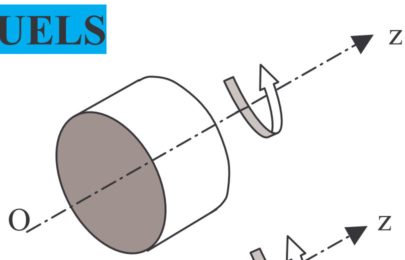
MOMENT D'INERTIE du solide (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{z})$

$$J_{Oz} = \iiint_{(s)} \ell^2 \, dm$$

Intégrale triple = "somme" sur tout le solide
Les mathématiciens se font une joie de les calculer pour des tas de formes différentes de solide, et les résultats sont dans tous les bons formulaires de mécanique...

5.4. MOMENTS D'INERTIES USUELS

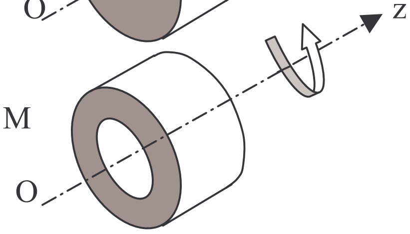
■ CYLINDRE PLEIN
homogène, de rayon R et de masse M



$J_{Oz} = ½\, M.R^2$

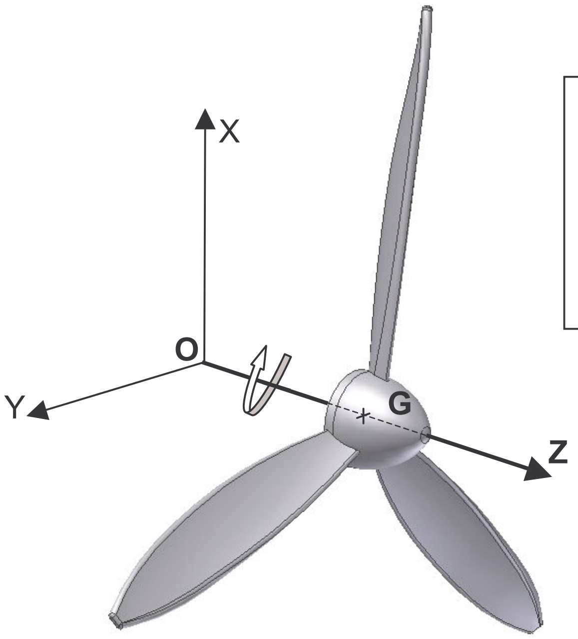
en kg.m²

■ CYLINDRE CREUX
homogène, de rayons r et R, et de masse M



$J_{Oz} = ½\, M.(R^2 + r^2)$

6. P.F.D. APPLIQUE A UN SOLIDE EN ROTATION



HYPOTHESE et limite de l'étude :

Le solide (S) possède un **axe de symétrie** matérielle (au niveau de la géométrie et des masses)

Conséquence : le centre de gravité G est sur cet axe

PFD (rotation)
A savoir !

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE :
Si (S) est en rotation autour de son axe de symétrie $(O, \vec{z})$
par rapport à un repère galiléen, alors :

(en tout point O de l'axe)

$$\begin{cases} \Sigma\overrightarrow{R_{(ext\to S)}} = \vec{0} \\ \Sigma\overrightarrow{M_{O\,(ext\to S)}} = J_{Oz}\,.\,\theta''.\,\vec{z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{Oz}.\theta'' \end{vmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \end{cases}$$

$\overrightarrow{R_{(ext\to S)}}$ = *somme des résultantes des actions extérieures sur S* — en N

$\overrightarrow{M_{O\,(ext\to S)}}$ = *moment résultant en O des actions extérieures sur S* — en N.m

J_{Oz} = *moment d'inertie du solide S autour de l'axe Oz* — en kg.m²

θ'' = *accélération angulaire du solide S* — en rad/s²